

Otázka: Matematika v hudbě

Předmět: Dějiny hudby

Přidal(a): Ondrapi

1 Úvod

Tato práce je zaměřena na souvislost mezi hudbou a matematikou. Soustředil jsem se na obecné popsání hlavních hudebních pojmů, ve kterých se nejvíce vyskytují matematické zákonitosti.

Chceme-li se zabývat matematikou a její aplikací v hudbě, musíme si nejprve uvědomit jednu základní věc, kterou bychom určitě neměli opomíjet. Matematika, i přestože má s hudbou přece jenom hodně společného, nemá žádný vliv na hudební tvorbu skladatele, jakožto znějící produkt jeho myšlenkové aktivity. Toto pravidlo však v dnešní době neplatí zdaleka pro všechny. Díky rychlému vývoji moderních technologií používají skladatelé, jestli jim tak ještě vůbec můžeme říkat, moderní popové hudby složité počítačové programy, které pracují s matematickými zákony a používají je k tvorbě tzv. dokonalé hudby. Ta posluchačům téměř zaručeně přináší příjemný pocit, kladný dojem z dané skladby a zajišťuje skladateli úspěch a slávu. Není tedy divu, že bych to označil jako problematiku moderní hudby vzhledem k faktu, že se na hudební scéně objevují stále podobné, ne-li přímo stejné melodie akorát s jiným rytmem.

Základem pro tyto dva obory je jejich odlišný jazyk. Hudebníci si uvědomili, že melodii, kterou právě složili, by bylo prakticky nemožné popsat slovně, a proto si vytvořili vlastní jazyk v podobě notového zápisu. Ten je pro ně mnohem přesnější, srozumitelnější a přehlednější než složitý slovní popis hudebního vjemu. A to stejné se odehrálo i v matematice vytvořením jazyka matematického, ze kterého se všechny matematické symboly i výrazy dají přeložit do běžné řeči. A proto se člověk musí tento jazyk naučit, aby rozuměl matematice, stejně tak jako se musí naučit číst noty, aby porozuměl zápisu skladby.

Stopy po matematice tedy v hudbě najdeme v již zmiňovaném notovém zápisu, jehož přísné struktury se skladatel drží při psaní hudebního díla. Objevují se v něm takty jako 4:4 (čtyřčtvrtový), 3:4 (tříčtvrtový), dále například celé noty, půlové noty, čtvrtové, osminové nebo

i šestnáctinové. Při zápisu skladby se z těchto not tvoří takt. Znamená to, že se noty různé délky v daném rytmu musí vejít do konkrétního taktu, což bych v matematice přirovnal k hledání společného jmenovatele. Faktem je, že v hudbě jen těžko najdeme využití vyšší matematiky a různých typů složitých rovnic, ale bez základních matematických dovedností by určitě žádný skladatel neměl šanci uspět.

Cílem mojí práce je přiblížit vliv a použití matematických zákonitostí po hudební stránce.

2 Historie matematiky v hudbě

2.1 Pythagoras a zvony

Pokud nás budou zajímat úplné počátky, historické prameny nás zavedou až do 6. století před Kristem, kdy slavný matematik a filozof Pythagoras, jako první objevil vztah mezi celými čísly a zvukovou harmonií. Podle všeho si při procházení trhu všiml kovářových železných zvonků a zpozoroval, že čím větší zvonek je, tím hlubší zvuk vydává. Následně si u kováře všiml dvou kovadlin, jejichž zvuk byl od sebe vzdálen přesně oktávu. Požádal je, aby je odvážil a zjistil, že hmotnost těchto zvonků je v poměru 2:1. Kovadliny, které byly od sebe vzdáleny kvintu, měly poměr hmotností 3:2.

Pythagoras si uvědomil, že tóny, které slyšíme, tvoří nejkrásnější čisté intervaly (oktávu, kvintu a kvartu) tehdy, pokud se poměr hmotností, délek nebo tloušťek dvou předmětů dá vyjádřit malými celými čísly. Těleso vydává o oktávu nižší zvuk, když frekvence kmitání dvojnásobně těžšího tělesa je dvojnásobně nižší.

2.2 Zlatý řez

Většinou se zlatý řez využívá při fotografování nebo malování, ale jeho využití můžeme najít i v hudbě, a to nejen při skládání skladby, ale také při výrobě hudebního nástroje. Důkladným studováním a rozborem děl od J. W. Mozarta či L. van Beethowena se zjistilo, že téměř všechna jejich díla jsou rozdělena na dvě části, přesně podle zlatého řezu. Skoro stejně jsou v poměru zlatého řezu rozděleny i černé a bílé klávesy na klavíru nebo tělo při výrobě houslí. Například v hudebním díle Music for Strings, Percussion and Celeste od skladatele Bély Bártoka dochází ke xylofonovému postupu v intervalech 1: 2: 3: 5: 8: 5: 3: 2: 1.

3 Základní hudební jednotky

Ve stručné historii jsme si dokázali, že matematika je v hudbě využívána již od samotných počátků při tvorbě nástrojů nebo skládání hudby s pomocí zlatého řezu. Nyní se ale podíváme na další společnou činnost, kde se tyto dva obory střetly, a tím je ladění nástrojů. Než se ovšem pustíme do jeho rozboru, musím zmínit pár základních pojmů, které s laděním úzce souvisí.

3.1 Cent

Stejně tak jako hmotnost má svojí základní jednotku kilogram, má i hudba svou vlastní bezrozměrnou jednotku, která se nazývá cent. Používá se pro měření intervalů a je používána nejen v hudební akustice, ale i obecně v hudbě samotné. Její definice plyne z rovnoměrného temperovaného ladění, které dělí oktávu na 12 stejně velkých půltónů. Jeden cent je tedy $1/1200$ oktávy. Vzdálenost jednoho centu je mezi dvěma tóny tehdy, pokud se poměr kmitočtu vyššího tónu ke kmitočtu nižšího tónu rovná.

3.2 Půltón

Má v rovnoměrně temperovaném ladění poměr frekvencí $\sqrt[12]{2}$ a je nejmenším intervalem v diatonické stupnici.

3.3 Celý tón

Neboli velká sekunda, je tvořena dvěma půltóny a v rovnoměrně temperovaném ladění má poměr frekvencí $\sqrt[6]{2}$.

4 Rozdíl mezi laděním a laděním

První význam se používá ve spojení s nástrojem. Každý nástroj má své základní naladění, se kterým většina hudebníků hraje, a pro které je také složeno nejvíce hudebních skladeb. Bez naladěného nástroje by totiž hudba z notového zápisu nezněla tak, jak ji skladatel původně složil. Například na kytáře jsou struny naladěny: *ehgdae*. Použijeme-li ale ladící kolíky a strunu *e* snížíme na strunu *g*, takzvaně ji podladíme. Poté se skladateli otevírají nové možnosti kompozice a variace při následném skládání. Aby to však pro budoucího hráče nebylo matoucí, na začátku notového zápisu uvádíme, v jakém naladění skladba je.

Obecnou definicí druhého významu je, že ladění stanovuje přesné vzdálenosti tónu v hudební stupnici a určuje jejich frekvence a poměry mezi nimi. A na toto téma se až do konce mé práce zaměřil.

4.1 Charakteristika tónu

Tón vzniká chvěním určitého tělesa. Těleso kmitající pravidelně s určitou frekvencí vydává tóny např. Struna. Pokud ovšem kmitá nepravidelně, vydává hluky, což jsou zvuky s neurčitou výškou. Ty můžeme najít u většiny bicích nástrojů. Výška tónu závisí na frekvenci kmitání tělesa, kdy se se stoupajícím počtem kmitů za sekundu zvyšuje i vydávaný tón. Funguje zde tedy triviální přímá úměra.

4.2 Alikvotní tóny

Každý tón se dále skládá z dalších menších tónů, o kterých nikdo z vás doteď určitě nevěděl. Předmět vydávající zvuk se chvěje velmi složitě, takže kromě chvění celku vzniká i chvění menších částí tělesa. Názorným příkladem je jakákoliv struna hudebního nástroje, kdy chvění podléhá celá struna, zároveň její polovina, třetiny a tak to pokračuje skoro do nekonečna. Proto je pro naše ucho téměř nemožné takové tóny na nízkých frekvencích vnímat.

4.3 Interval

Interval je obecně vzdálenost mezi dvěma tóny. Interval harmonický nám vzniká, pokud se tóny

ozvou současně. Když se ozvou po sobě, vytváří se interval melodický. Základním hudebním intervalem je oktáva, jejíž tóny, kromě primy, mají nejjednodušší podíl frekvencí 2:1.

Názvy jednotlivých intervalů jsou odvozeny podle toho, o kolik stupňů diatonické stupnice jsou od sebe tóny daného intervalu vzdáleny. Názvy intervalů tedy jsou: prima, sekunda, tercie, kvinta, kvarta, sexta, septima, oktáva. Platí pro všechny durové, mollové a církevní hudební stupnice, které vychází ze sedmitónové řady *C, D, E, F, G, A, H*. Protože je ale oktáva v evropské hudbě rozdělena na 12 půltónů, nestačí nám toto označení k popisu dvanácti intervalům v dvanáctitónové chromatické stupnici. Proto se před ně přidávají doplňková přídavná jména. Prima, kvarta, kvinta, oktáva mohou být čisté. Sekunda, tercie, sexta a septima pak mohou být buď malé, nebo velké. Každý interval však může být ještě zvětšený nebo zmenšený, kdy zvětšený je o půltón větší než čistý a zmenšený je o půltón menší než čistý.

Nejdůležitější pro teorii ladění jsou ale intervaly v rozsahu jedné oktávy, tedy od poměru 1:1 (čistá prima) do poměru 2:1 (čistá oktáva). Hudební interval decima s podílem frekvencí 5:2 lze například rozepsat jako oktáva + velká tercie ($2:1 \times 5:4 = 5:2$).

4.4 Hudební stupnice

Všem intervalům nastoluje určitý řád hudební stupnice, která vzniká naplněním oktávy řadou tónů. Vůbec nejstarší stupnice používaná ve starověké Číně či Japonsku se nazývá Pentatonika. Tato stupnice měla 5 tónů a neobsahovala žádný půltón. V Řecku používali posloupnosti čtyř tónů tzv. tetrachordy, které se po rozdělení tercií skládali pouze z celých tónů a půltónů. V evropské hudbě se pak nejčastěji vyskytuje dvanáctitónová chromatická stupnice složená z půltónů.

5 Ladění

Různým zkoušením a kombinací se postupem času rozdělila jednotlivá ladění na čistá a temperovaná. Do těchto skupin se dále zařazují další ladění podle jejich společných znaků a místa využití. Obecně vám tedy popíšu základní principy již zmiňovaných dvou hlavních skupin.

5.1 Čistá ladění

Využívají pouze tóny, jejichž frekvence jsou ve vzájemných poměrech vyjádřitelné celými čísly. Pokud jsou čísla malá, zní souzvuky čistě a jsou příjemné na poslech. Toto ladění má ale bohužel i svoji nevýhodu, díky které je téměř nevyužitelné v této době při skládání složitější hudby. Použití omezeného počtu tónů vede k nečistým, nelibozvučným intervalům známy také pod označením jako vlčí intervaly. Nejznámější a nejběžnější je z této skupiny nejspíše ladění pythagorejské, které pro odvození všech tónů využívá oktávu 2:1 a kvintu 3:2. Velmi často používané je ale taky ladění didymické, které navíc přidává interval velké tercie 5:4.

5.2 Temperovaná ladění

Funguje na principu záměrného rozladění některých čistých intervalů, čímž dociluje přesnějšího naladění intervalů jiných. Hlavní výhodou je modulace do jiných tónin bez výskytu vlčích intervalů.

5.2.1 Rovnoměrně temperované ladění

Je aktuálně nejpoužívanějším laděním v evropské hudbě. Všechny intervaly jsou zde stejného druhu (prima, sekunda, tercie...) a přesně stejně velké.

5.2.2 Nerovnoměrně temperované ladění

Upravují frekvence tónů tak, aby blízké tóniny od základní dané tóniny zněly co nejlépe a vzdálené tóniny alespoň použitelně.

6 Závěr

Díky této práci jsem si pomohl rozšířit pohled na hudbu očima matematika. Dokázali jsme si, že spojení těchto dvou oborů přetrvává už od středověku a napomáhá při stavbě nástrojů i

skládání hudby.

8 Zdroje

Příspěvatelé Wikipedie, *Celý tón* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2013, Datum poslední revize 16. 05. 2013, 13:04 UTC, [citováno 29. 05. 2017]

<https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Cel%C3%BD_t%C3%B3n&oldid=10328365>

Příspěvatelé Wikipedie, *Půltón* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2016, Datum poslední revize 2. 04. 2016, 20:11 UTC, [citováno 29. 05. 2017]

<<https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=P%C5%AFit%C3%B3n&oldid=13521115>>

Příspěvatelé Wikipedie, *Interval (hudba)* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2017, Datum poslední revize 16. 03. 2017, 15:59 UTC, [citováno 29. 05. 2017]

<[https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Interval_\(hudba\)&oldid=14798999](https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Interval_(hudba)&oldid=14798999)>

Příspěvatelé Wikipedie, *Ladění* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2017, Datum poslední revize 1. 02. 2017, 15:10 UTC, [citováno 29. 05. 2017]

<<https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Lad%C4%9Bn%C3%AD&oldid=14630918>>

Příspěvatelé Wikipedie, *Temperované ladění* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2015, Datum poslední revize 31. 07. 2015, 19:59 UTC, [citováno 29. 05. 2017]

<https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Temperovan%C3%A9_lad%C4%9Bn%C3%AD&oldid=12772365>

<https://www.zones.sk/studentske-prace/matematika/8595-matematika-v-hudbe/>